ID．微積分と初等線形代数 I　講義報告[1]

2008 年 6 月 22 日（日）　11:00 - 13:00

点、直線、平面、空間 $\cdots$ これらを「一般平面」として統一的に扱い、その性質について調べた。最後に $\mathbb{R}^n$ に含まれる任意の集合を包む最小の平面として、Affine 包の概念を扱った。

1　一般平面

定義 1.1 ($\mathbb{R}^n$ の直線)**.**
$\mathbb{R}^n$ の点 $a, b(a \neq b)$ を通る直線は、

$$G(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (1-t)a + tb,\, t \in \mathbb{R}\}$$

で定義される。

定義 1.2 ($\mathbb{R}^n$ の一般平面)**.**
$\mathbb{R}^n$ の部分集合 M が一般平面であるとは、$M \neq \emptyset$ かつ $a, b \in M \Rightarrow G(a, b) \subset M$

例 1.1 (一般平面の例)**.**

i. $\{a\}, \quad a \in \mathbb{R}^n$

ii. $G(a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}^n$

iii. $\mathbb{R}^n$

2　超平面

定義 2.1 ($\mathbb{R}^n$ の超平面)**.**
点 a をとおり法線ベクトルが $v(\neq 0)$ の超平面とは、

$$H_v := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - a, v\rangle = 0\}$$

という形の集合をいう。

$$\langle x - a, v\rangle = 0$$

を超平面の方程式という。

[1] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

定理 2.1. H_v は一般平面である。

練習問題 2.1. a, b を $\mathbb{R}^n$ の定点 $(a \neq b)$ とする。このとき、

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| = ||y-b||\}$$

で表される図形 M は超平面であることを示せ。

定理 2.2. $F_1, F_2, \ldots, F_r$ を $\mathbb{R}^n$ の一般平面とするとき、次の *2* つが成り立つ。

1 $\cap_{j=1}^r F_j \neq \emptyset$ なら、 $\cap_{j=1}^r F_j$ は $\mathbb{R}^n$ の一般平面である。

2 $F_1 + F_2 + \ldots + F_r = \Sigma_{j=1}^r F_j = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_r \mid x_j \in F_j, (1 \leq j \leq r)\}$.

特に、F を一般平面、a を定ベクトルとした場合、

$$a + F = \{a + x \mid x \in F\}$$

も一般平面であり、F のベクトル a による平行移動という。

3 集合の Affine 包

定理 3.1. A を $\mathbb{R}^n$ に含まれる任意の集合とするとき、A を包む包含関係における最小の平面、$Aff(A)$ が存在する。

練習問題 3.1. $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ のとき、

$$Aff(A) = \{\Sigma_{j=1}^r t_j a_j \mid \Sigma_{j=1}^r t_j = 1\}$$

となることを示せ。

補題 3.1. $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ とする。M が A を含む一般平面ならば、$\Sigma_{j=1}^r t_j = 1$ を満たす、任意の $t_1, \ldots, t_r$ に対して、$\Sigma_{j=1}^r t_j a_j \in M$ が成り立つ。

記録 N.S.